

# Laboratorio di Astrofisica

## Osservazioni di Sirio a Piazza San Pietro

Patrizio Malloni

Dipartimento di Fisica, Sapienza Università di Roma, Piazzale Aldo Moro, 5, 00185, Roma, Italia.  
e-mail: malloni.1963482@studenti.uniroma1.it

June 17, 2024

### ABSTRACT

**Context.** La relazione tratta delle osservazioni e analisi dei transiti di Sirio utilizzando la meridiana di Piazza San Pietro, lo studio della velocità di rotazione terrestre e della modellizzazione dell'interno setup sperimentale

**Aims.** Valutare l'accuratezza della meridiana di Piazza San Pietro nel tracciare il moto apparente di Sirio confrontando i dati osservati con le effemeridi astronomiche

**Methods.** Misure ripetute a diverse distanze dall'obelisco, così da avere più transiti e poter stimare con più accuratezze i parametri di interesse. Si è usato un telefonino Samsung J5 per le riprese video e cronometri per la misurazione dei tempi. I dati sono stati analizzati utilizzando software come Stellarium e Python. La precisione delle misurazioni è stata migliorata utilizzando metodi di fotogrammetria e il calcolo delle incertezze è stato eseguito con metodi statistici

**Results.** Le osservazioni hanno rivelato un anticipo dei transiti di Sirio rispetto alle effemeridi, indicando una deviazione verso ovest della meridiana. La velocità angolare misurata di Sirio è risultata in buon accordo con il valore teorico, con alcune discrepanze attribuite a errori strumentali. Sono stati osservati fenomeni di diffrazione durante i transiti e l'esistenza di una rotazione dell'obelisco, stimata circa  $0.3^\circ$

**Conclusions.** Le osservazioni condotte hanno fornito dati preziosi per lo studio dei transiti di Sirio e la verifica dell'allineamento della meridiana e della rotazione dell'obelisco, fornendo metodi per l'analisi dello studio della curva di luce e dei fenomeni diffrattivi e dato spazio a nuove idee per lo studio e le ricerche su questa meridiana

## 1. Introduzione

L'obiettivo principale di questo studio è stato osservare e analizzare i transiti di Sirio utilizzando la meridiana situata ai piedi dell'obelisco Vaticano a Piazza San Pietro. Attraverso queste osservazioni, si è valutata l'accuratezza e la precisione della meridiana nel tracciare il moto apparente di Sirio, confrontando i dati raccolti con le effemeridi astronomiche. Ulteriori obiettivi includono lo studio delle coordinate astronomiche, la misurazione della velocità di rotazione terrestre e della velocità angolare di Sirio, lo studio della curva di luce e dei fenomeni ottici associati al transito.

## 2. Premesse

### 2.1. Meridiana a Piazza San Pietro

La meridiana di Piazza San Pietro rappresenta un laboratorio astronomico unico al mondo, essendo l'unica attualmente funzionante con il Sole e le stelle. E' tra le principali meridiane a Roma, assieme a quella Clementina nella Basilica di Santa Maria degli Angeli (anch'essa una delle più grandi e precise mondo).

La piazza è situata in città del Vaticano (41.902, 12.457) ed è costituita da: 4 colonnati di 284 colonne e 88 pilastri, la basilica di San Pietro orientata con la facciata verso Est e un obelisco egiziano al centro della piazza, chiamato obelisco Vaticano.

L'obelisco è stato realizzato dal Faraone Psammetico II nel 1970 a. C., portato a Roma da Caligola e posto sul circo di Nerone. "Vide" il martirio di san Pietro. Poi nel 1586 l'architetto Domenico Fontana per volontà di papa Sisto V lo ha spostato

dove si trova ora. Di seguito una foto scattata da sopra la Basilica:



Fig. 1. Piazza San Pietro vista da sopra la Basilica

L'obelisco è costituito da diverse parti quali:

- un basamento di lato 8.25 m
- un tronco di piramide che parte da un lato di 2.6 m che decresce a partire da un terzo circa della sua altezza (ove misura ancora 2.6 m) fino a 1.2 m a 33.57 m di altezza (valore fornito da Domenico Fontana)
- dei tiranti che sorreggono la croce
- un fregio papale
- una stella
- un puntale

- una croce (di sezione quadrata di 9 cm di lato) che raggiunge i 40.14 m

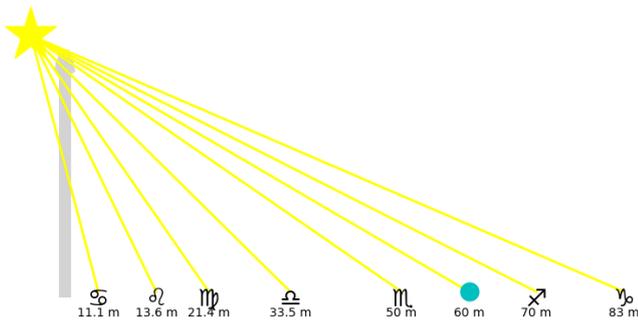
Ai piedi dell'obelisco si trova la meridiana, che si estende verso Nord per un totale di 72 m, dal segno del Cancro fino al Capricorno, superando la fontana destra di Maderno.<sup>1</sup> Inizia in corrispondenza del segno del Cancro, a una distanza di 11.1 m dal lato dell'obelisco e durante il suo percorso attraversa tutti gli altri segni dello zodiaco. In tabella 1 è rappresentata per ogni segno zodiacale la distanza dal lato dell'obelisco. Sono riportate anche le distanze del pilone in marmo vicino alla fontana e dell'inizio della fontana, posizioni utilizzate per le osservazioni.

Segno zodiacale	Distanza [m]	Simbolo
Cancro (solstizio d'estate)	11.1 ± 0.1	D1
Leone-Gemelli	13.6 ± 0.1	D2
Vergine-Toro	21.4 ± 0.1	D3
Bilancia-Ariete (equinozi)	33.5 ± 0.1	D4
Scorpione-Pesci	50.0 ± 0.1	D5
Pilone Fontana	54.6 ± 0.1	D6
Inizio Fontana	55.4 ± 0.1	D7
Sagittario-Acquario	70.0 ± 0.1	D8
Capricorno (solstizio d'inverno)	83.0 ± 0.1	D9

**Table 1.** Distanze dal lato della meridiana associate ai segni zodiacali, cui per praticità attribuisco i simboli D1

E' stata posta un'incertezza pari a 0.1 m, piuttosto modesta poiché queste distanze sono state misurate in piedi ed è quindi stato stimato un errore il cui ordine di grandezza è di 0.1 m. Le distanze D6 e D7 sono state stimate contando la distanza in Sanpietrini, cioè: da una foto ho contato il numero di Sanpietrini tra D1 e D2, conoscendone la distanza in metri ho trovato la dimensione media di un Sanpietrino e quindi contanto i Sanpietrini tra D5 e D6-D7 ho potuto trovare la distanza in metri. Tale misura è stata confermata dal professore che ha usato metro e piedi, che risultano di lunghezza più regolare rispetto al Sanpietrino.

Di seguito si riporta uno sketch della meridiana, di Sirio e dei segni.



**Fig. 2.** Sketch della meridiana. Si vedano sull'asse x le distanze dei vari segni

<sup>1</sup> La fontana era già presente nella Platea Sancti Petri ed è documentata sin dal Quattrocento, due secoli prima di Maderno

## 2.2. Sistemi di coordinate astronomiche

Per lo studio degli astri vengono utilizzati dei sistemi di coordinate quali il sistema equatoriale, eclittico e altazimutale. Ognuno ha pregi e difetti, per cui la scelta dipende dall'uso che se ne vuole fare. Questi sistemi permettono di descrivere con precisione la posizione di un astro nel cielo e sono fondamentali per l'astronomia osservativa. In questa esperienza è stato fatto uso soprattutto delle equatoriali e altazimutali.

### 2.2.1. Il sistema equatoriale

Si introduce il punto vernale, noto anche come primo punto d'Ariete, che è uno dei due punti equinoziali in cui l'equatore celeste interseca l'eclittica (piano perpendicolare all'asse di rotazione terrestre). Le coordinate utilizzate per descrivere la posizione di un astro nel cielo nel sistema equatoriale sono la declinazione ( $\delta$ ) e l'ascensione retta ( $\alpha$ ). La declinazione è misurata a partire dall'equatore celeste verso il polo Nord celeste, mentre l'ascensione retta è misurata a partire dal punto vernale in senso antiorario lungo l'equatore celeste. L'angolo orario è la distanza angolare di una stella rispetto al meridiano passante per il sud, misurata in ore, minuti e secondi. Il tempo siderale, invece, è definito come l'angolo orario del punto vernale ed è una misura del tempo basata sulla posizione delle stelle piuttosto che sul Sole.

### 2.2.2. Il sistema altazimutale

Nel sistema di coordinate altazimutali, l'altezza o elevazione ( $h$ ) è l'angolo di un astro rispetto all'orizzonte, mentre l'azimut misura l'angolo orizzontale a partire dal Nord (o dal sud) in senso orario fino alla posizione dell'astro. In questo sistema, l'altezza varia da  $0^\circ$  (sull'orizzonte) a  $90^\circ$  (allo zenit), e l'azimut varia da  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Per l'altezza vale:

$$h = 90^\circ - |\phi - \delta|$$

dove  $\phi$  è la latitudine dell'osservatore e  $\delta$  è la declinazione dell'astro. Quindi a parità di luogo l'altezza di un astro durante il suo transito è costante per tutto l'anno.

### 2.2.3. Il sistema eclittico

Nel sistema eclittico le coordinate sono la latitudine eclittica ( $\beta$ ) misurata dal punto vernale in senso antiorario e la longitudine eclittica ( $\lambda$ ), cioè la distanza angolare dal piano dell'eclittica.

## 2.3. Sirio

Sirio è un sistema binario costituito da una stella bianca di sequenza principale (Sirio A) e una nana bianca (Sirio B), distante 8.6 ly da noi. Ha una luminosità assoluta 25 volte più intensa del Sole, e la sua magnitudine apparente è pari a 1.46, che ne fa la stella più luminosa osservabile in cielo, dopo il Sole. Ha un'elevazione di  $30.13^\circ$  (a Roma) e un diametro angolare di 6 milliarsec.

Per tale motivo rappresenta un buon candidato per le osservazioni tramite un rudimentale setup sperimentale. La visibilità di Sirio cambia a seconda della stagione a causa del movimento della Terra intorno al Sole. In particolare è possibile vedere Sirio nel cielo notturno da fine ottobre (alle 4:30 del mattino) sino a fine marzo (ore 19).

## 2.4. Effemeridi

Le effemeridi sono tabelle giornaliere (dal greco ephemeron, giorno) che contengono valori di diverse grandezze astronomiche; forniscono posizioni di corpi celesti, magnitudini, parametri orbitali. Forniscono informazioni su data e ora dei transiti, ascensione retta, declinazione, altezza. Tra le più affidabili citiamo quelle dell'Osservatorio di Parigi o della Nasa. Vengono calcolate combinando:

- leggi di Keplero
- perturbazioni gravitazionali
- effetti di relatività
- dati osservativi

In questa esperienza per l'orario dei transiti sono state utilizzate quelle di Stellarium, imponendo che l'azimuth fosse 180°.

## 3. Osservazioni

Le nostre osservazioni di Sirio sono iniziate all'inizio del mese di marzo 2024.

L'idea di osservare Sirio è nata per caso: dovevamo infatti vederci alla basilica di Santa Maria degli Angeli, ove già stati precedentemente per studiare l'immagine stenopeica e la meridiana Clementina, ma a causa di un'incomprensione sul luogo di incontro, ci siamo ritrovati ad osservare Sirio in Piazza San Pietro.<sup>2</sup> Effetti quali la durata sempre maggiore delle ore di luce, il fatto che Sirio transita ogni giorno 3 m 56 s prima, il cambio dell'orale legale hanno fatto sì che le osservazioni si interrompessero in corrispondenza circa dell'equinozio di primavera. Fino a quel momento, abbiamo potuto osservare per diversi giorni e rilevare più transiti a diverse posizioni sulla meridiana. I primi giorni sono serviti per prendere confidenza con il nostro "osservatorio astronomico" e gli strumenti utilizzati, nonché con le nozioni di meccanica celeste. I dati rilevanti e inseriti all'interno di questa relazione di laboratorio fanno riferimento ai giorni 19 e 20 marzo 2024 per quanto riguarda i transiti, e al giorno 14 marzo per quanto riguarda lo studio della curva di luce. Per stimolare la curiosità del lettore di seguito è riportata un'immagine di Sirio mentre sta per entrare nel primo tirante.



Fig. 3. Sirio intercetta il primo tirante

<sup>2</sup> Sono state condotte analisi da me sulla meridiana Clementina, in particolare si è studiata la deviazione del laser e il foro Gnomonico, ma non verranno riportate qui per motivi di sintesi

## 3.1. Strumenti

Come strumenti abbiamo utilizzato:

- un telefonino Samsung J5 e la fotocamera incorporata per riprendere i transiti e il moto di Sirio
- 2 cronometri: uno calibrato con l'ora esatta, l'altro da calibrare poiché con una decina di secondi di ritardo
- un treppiedi per eventualmente fare le misure da terra
- metro e righello per le misure a terra dell'ombra dell'obelisco
- cartoncino per la riflessione della croce

Di seguito riportate le caratteristiche della fotocamera del telefonino:

Fotocamera	Valore
Modello	SM-J500FN
f (distanza focale)	4 mm
D (apertura)	1.85 mm
F-stop	f/D
Tempo di esposizione	1/17 s
Sensibilità ISO	ISO 1250
Lunghezza focale (equivalente 35mm)	28 mm
Videocamera	Valore
Larghezza fotogramma	480 pixel
Altezza fotogramma	360 pixel
frame/s	29.77
Zoom digitale	4x

Table 2. Specifiche della fotocamera videocamera utilizzata per registrare il video

Il diametro dell'obiettivo, il tempo di esposizione e la sensibilità influiscono sulla quantità di luce che può essere raccolta:  $L \propto D \cdot t_{esposizione} \cdot ISO$

Lo zoom digitale funziona ritagliando una porzione centrale dell'immagine e ingrandendola. Questo comporta una riduzione della risoluzione effettiva dell'immagine finale. Il numero di pixel effettivo utilizzato è ridotto di un fattore pari al quadrato del livello di zoom.

## 3.2. Strategia e accorgimenti

Il nostro obiettivo primario era studiare i transiti di Sirio e confrontarli con le effemeridi, dunque si era deciso di effettuare misurazioni dei tempi di entrata e uscita di Sirio della facciata dell'obelisco a varie distanze da esso: in particolare si sono scelte le posizioni da D4 a D7, cioè dalla Bilancia all'inizio della fontana (ove Sirio esce dall'obelisco e intercetta i tiranti) in quanto consentivano agilmente di spostarsi da una posizione all'altra più rapidamente di Sirio, che procedeva verso Ovest a una velocità di 14.4 arcsec/s. Sono stati misurati prima tutti gli ingressi e poi tutte le uscite. In ogni video si è ripreso l'orario dal cronometro, così da calibrare l'orario del transito osservato analizzando il video una volta a casa.

Come accorgimenti nelle misurazioni si è posta particolare attenzione al fatto di porre la videocamera perpendicolare a terra sulla linea meridiana in modo tale da limitare il disallineamento. Si è messo il piede sinistro sulla mediana e il telefonino in asse con esso, ad altezza d'uomo dinanzi all'occhio sinistro. Si è cercato di mettersi esattamente a una distanza dalla meridiana pari a  $D_i$ . Inoltre si è cercato di tenere la mano quanto più ferma.

### 3.3. Incertezze ed errori

Per quanto riguarda le incertezze da attribuire alle quantità  $D_i$  e le corrispondenti altezze sull'obelisco ove transita Sirio, esse sono state assunte pari alla prima cifra decimale, per cui essendo le misure in metri, l'incertezza sarà pari a 0.1m. Questa è una stima ragionevole considerando che le distanze dei segni zodiacali sono state misurate accuratamente dal prof. Sigismondi anni fa, tramite l'uso di un metro e dei piedi, e che le misure delle altezze sono state calcolate assumendo l'elevazione di Sirio, nota con estrema precisione. Anche qui l'incertezza è pari alla prima cifra decimale, considerando che il solo contributo all'errore proviene dalle misure di  $D_i$ .

Per la stima dei lati dell'obelisco  $\ell$  alle diverse altezze ci siamo basati sullo studio del prof. Sigismondi (ed anche sulla pubblicazione di Domenico Fontana (1590) disponibile online) in cui si utilizza la fotogrammetria: tramite la misurazione delle lunghezze in pixel e il confronto con l'altezza nota del monolite (33.6m) è possibile determinare la lunghezza dei lati dell'obelisco, che ricordo decrescere lineamente con l'aumentare dell'altezza. E' stata anche scattata una foto da via della Conciliazione, a 466 m di distanza per lo studio con una minima deformazione prospettica. Per comodità è stata di nuovo presa un'incertezza del decimo di metro.

Per l'angolo sotteso  $\theta$  (angolo formato tra le linee di vista che vanno dal punto di osservazione a due vertici del quadrato) ho attribuito un'incertezza calcolabile con la formula delle derivate parziali, che approssimando  $\tan(\theta)$  con  $\theta$  per piccoli angoli è:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{D}\right)^2 + \left(\frac{l\sigma_D}{D^2}\right)^2}$$

che è dell'ordine del decimo di grado.

Per i tempi poiché l'errore sul singolo frame è molto basso (1 frame=0.03 s) l'incertezza deriva in maniera preponderante dalla precisione con cui riusciamo a discernere, ad esempio all'ingresso, l'istante in cui Sirio tocca l'obelisco e l'istante in cui la luce di Sirio non raggiunge più la fotocamera. Facendo una media di questi due istanti si ha una buona stima di quello che può essere l'istante di ingresso. Le incertezze tendono a rimanere basse trattandosi di differenze e medie di tempi.

Tuttavia ho assunto un'incertezza di 0.1s considerando che la telecamera è tenuta in mano durante il transito, dunque c'è un tremore non trascurabile dovuto ad essa che aumenta l'incertezza sui tempi.

Per quanto riguarda le incertezze sulla velocità angolare e le altre quantità associate si è optato di discutere le differenze tra le due giornate di osservazione e sulle possibili ulteriori sorgenti di errore che distorcono il risultato da quello atteso.

## 4. Analisi dati

### 4.1. Software

Per l'analisi dei dati sono stati utilizzati software come Stellarium per il calcolo delle effemeridi e programmi di analisi dati come Excel e Python (utilizzato anche per i grafici); sono stati usati anche Paint (per il conteggio dei pixel) e VLC con le funzionalità aggiuntive per lo studio dei singoli fotogrammi. E' stata posta particolare attenzione al calcolo degli angoli in radianti, poi riconvertiti in gradi, arcominuti o arcosecondi. Valgono le relazioni:

Angolo	Valore	Valore
rad	1	0.01745
deg	57.30	1
arcmin	3437.75	60
arcsec	206265	3600

**Table 3.** Conversione degli angoli da radianti ad altre unità

### 4.2. Calcolo di $h, \ell, \theta$

L'altezza  $h$  di riferimento sull'obelisco, vale a dire l'altezza dalla base fino al punto in cui Sirio incontra la facciata, si calcola con la formula di Pitagora:

$$h = D_i \cdot \tan(h_{Sirio}) + 1.8m$$

dove:

- $D_i$  sono i valori di distanza
- $h_{Sirio}$  è l'altezza di Sirio
- 1.8 è l'altezza del telefonino da terra. Infatti queste misure sono state realizzate tenendo il telefono più o meno dinanzi agli occhi.

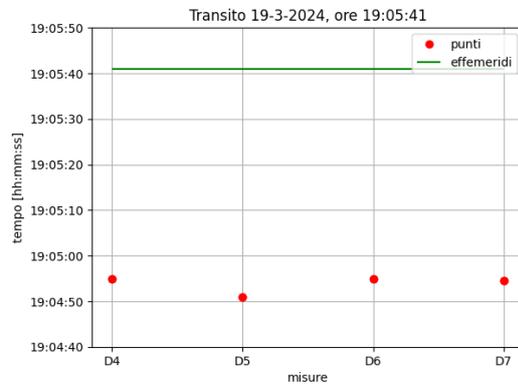
I transiti osservati sono stati realizzati dalle posizioni da D4 a D7, per cui si riportano altezze e lati corrispondenti, nonché gli angoli sottesi.

Distanza [m]	h [m]	$\ell$ [m]	$\theta$ [°]
$D_4 = 33.5$	21.2	2.0	3.4
$D_5 = 50.0$	30.8	1.4	1.6
$D_6 = 54.6$	33.5	1.2	1.3
$D_7 = 55.4$	34.0	1.2	1.2

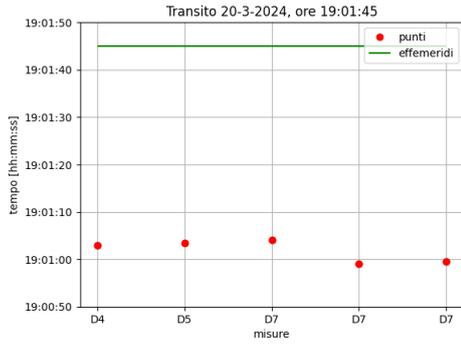
I lati  $\ell$  sono stati calcolati assumendo una decrescita costante da 2.6m a 1.2m (in cima) e gli angoli tramite il teorema di pitagora ( $\theta = \arctan(\frac{\ell}{D_i})$ ). Non sono state realizzate misure a distanze più lontane poiché la distanza è tale che Sirio passa al di sopra dell'obelisco.

### 4.3. Studio dei transiti di Sirio

Lo studio dei transiti rappresenta l'osservazione principale che si può realizzare con una meridiana. Lo studio è molto utile in quanto può fornire informazioni su: la velocità di rotazione Terrestre, gli allineamenti e realizzazione della meridiana stessa. Le misure migliori sono quelle relative al 19 e 20 marzo 2024.



**Fig. 4.** Orari dei transiti misurati dalle diverse distanze  $D_i$ , media e confronto con effemeridi (in verde)



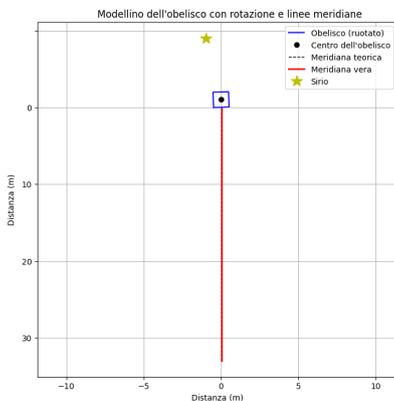
**Fig. 5.** Orari dei transiti misurati dalle diverse distanze  $D_i$ , media e confronto con effemeridi (in verde)

Anzitutto nel secondo grafico vediamo che sono state prese misure di transito 3 volte alla stessa distanza. Queste sono relative ad ingresso e uscita dal primo tirante, dal secondo tirante e dal puntale.

L'orario del transito è stato calcolato come la media aritmetica tra l'istante di uscita e quello di entrata ottenuti dai video, i cui istanti sono stati calibrati con l'orologio del prof. Sigismondi ripreso sempre durante il video e radiosincronizzato con l'orario esatto.

Risulta piuttosto evidente da tutti i dati la presenza di un anticipo del transito atteso dalle effemeridi, che non fa pensare a una scarsa precisione nella presa delle misure bensì alla presenza di un errore sistematico. E' stato attribuito a una deviazione della meridiana rispetto al Nord, che distorce il transito atteso, anticipandolo se deviata verso Ovest. Questo anticipo in principio può essere dovuto sia la meridiana che la posizione dell'obelisco. Questo può essere schematizzato come ruotato rispetto al punto medio del lato della base che guarda a Nord. Tuttavia l'anticipo misurato è troppo grande per essere spiegato dalla rotazione; inoltre quando la distanza tra il punto d'osservazione e il lato dell'obelisco aumenta, la differenza di posizione tra i punti ruotati e non ruotati diventa meno significativa in termini di angolo. Non risulta quindi ideale studiare la rotazione da questa distanza. E' stato fatto più precisamente nell'ultima sezione, con lo studio dell'ombra del sole sul disco del Cancro (D1).

Di seguito è riportato uno sketch dell'obelisco e della meridiana, con il confronto con quella teorica. L'esattezza della configurazione qui rappresentata è stata testata con diversi approcci, ed è il culmine raggiunto dopo un intenso susseguirsi di prove, errori, ipotesi poi falsificate.



**Fig. 6.** Modello del nostro osservatorio

Di seguito una tabella riassuntiva con gli anticipi in secondi per ogni distanza.

Giorno	$D_i$	$t_{anticipo}$ [s]
19-03-2024	D4	42.0
19-03-2024	D5	46.0
19-03-2024	D6	49.0
19-03-2024	D7	42.5
20-03-2024	D4	38.0
20-03-2024	D5	37.5
20-03-2024	D7	37.0
20-03-2024	D7	42.0
20-03-2024	D7	41.5

**Table 4.** Tabella dei dati con giorno,  $D_i$  e anticipo in secondi

#### 4.4. Studio della velocità angolare

La velocità angolare teorica  $\omega$  di Sirio può essere calcolata come la velocità di rotazione terrestre moltiplicata la declinazione di Sirio:

$$\omega = \omega_T \cos(\delta) = \frac{2\pi}{T} \cos(\delta) = 15 \text{arcsec}/\text{scos}(\delta) = 14.4 \text{arcsec}/\text{s}$$

dove  $T$  è il periodo di rotazione della Terra ed è uguale a 23 ore, 56 minuti e 4 secondi (23.93 ore).

Può essere fatto un confronto tra la  $\omega$  teorica appena calcolata e le  $\omega$  calcolate sfruttando i tempi di occultazione misurati e l'angolo  $\theta$  tra il punto di osservazione e i lati dell'obelisco alle diverse altezze corrispondenti, esprimibile come:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

In aggiunta si può calcolare la velocità di Sirio vista dall'occhio (in approssimazione di elevazione di Sirio costante durante l'occultazione) con la relazione:

$$v = \tan(\omega) \sqrt{D_i^2 + h^2}$$

ove la radice rappresenta la distanza tra il punto d'osservazione e l'altezza sull'obelisco.

Infine si può calcolare la distanza  $d_{offaxis}$  come:  $v \cdot t_{anticipo}$ , che rappresenta la deviazione verso destra (verso Ovest) della meridiana.

Di seguito le tabelle relative alle quantità calcolate:

t occultazione [s]	$\omega$ [arcsec/s]	$v$ [mm/s]	offaxis [mm]
840	14.4	2.7	149
480	11.8	3.3	168
258	17.6	5.4	297
203	21.6	6.9	365

**Table 5.** Tabella dei tempi di occultazione e corrispondenti  $\omega$  in arcsec relativa al 19-03-2024

t occultazione [s]	$\omega$ [arcsec/s]	$v$ [mm/s]	offaxis [mm]
864	14.0	2.6	121
479	11.8	3.3	151
292	15.0	4.7	210
229	19.1	—	—
108	40.5	—	—

**Table 6.** Tabella dei tempi di occultazione e corrispondenti  $\omega$  in arcsec relativa al 20-03-2024

Commentiamo anzitutto la compatibilità di  $\omega$ : possiamo attribuirgli un'incertezza che dipende  $\ell$ , usata per cal-

colare  $\theta$ . Ricordo che per il calcolo di  $\ell$  sono state fatte assunzioni forti non potendo misurare il lato direttamente. Per cui  $\omega$  risentirà di un'incertezza più grande rispetto alle altre quantità. I tempi di occultazione invece sono piuttosto precisi.

- $\omega_{D4}$  è molto precisa per entrambe le giornate
- $\omega_{D5}$  per entrambe le giornate di misura, discostarsi maggiormente dal valore atteso rispetto alle altre. Dovrei avere un lato dell'obelisco maggiore di quello calcolato del 20 %, cioè 30cm in più, per essere compatibile col valore teorico. Attribuisco questa differenza proprio al lato, che dovrebbe essere non 1.4 m bensì 1.7 m
- $\omega_{D6}$  (solo il 19 marzo è stata fatta) è anch'essa buona
- $\omega_{D7}$  è buona tranne che nel caso delle ultime due misure relative al 2° tirante e al puntale

Non ho riportato il calcolo di  $v$  e  $d_{offaxis}$  nel caso del 2° tirante e del puntale poiché non ne conosco l'angolo sotteso (più piccolo del lato in cima). Ho fatto però un confronto usando la omega teorica e calcolando l'angolo sotteso e le dimensioni fisiche in lunghezza:

$$\ell = \tan(\omega t) D_i$$

che vengono rispettivamente:

- 0.9 m per il 2° tirante
- 0.4 m per il diametro del puntale

numeri che mi sembrano ragionevoli a giudicare delle foto della cima.

A questo punto considerando le  $\omega$  più precise, prese in D4 e D6, facendo la media e dividendo per la declinazione di Sirio si può ottenere una stima della velocità angolare terrestre che risulta:  $\omega_T = 15.3 \text{ arcsec/s}$ , in ottimo accordo col valore previsto di 15 arcsec/s.<sup>3</sup>

Le velocità  $v$  sono dell'ordine del mm e aumentano con l'aumentare di  $D_i$  come giusto che sia. L'ordine di grandezza torna anche con il moto atteso per il Sole.

La distanza offaxis è interessante poiché ci consente di trarre conclusioni riguardo la deviazione della meridiana verso Ovest. In particolare risulta che:

- D4: la meridiana è deviata di 14 cm circa, facendo la media tra le due giornate
- D5: deviazione di quasi 16 cm
- D6-D7: siamo sui 30 cm

L'angolo sotteso scala come l'inverso dell' offaxis:

$$\theta_{dev} = \frac{offaxis}{D_i}$$

Per cui si può affermare che andando verso Nord l'angolo di deviazione della meridiana  $\theta_{dev}$  diminuisce se l'aumento di distanza prevale sull'aumento della deviazione dell'offaxis. Lo studio della deviazione verrà integrato nelle sezioni più avanti con lo studio dei transiti solari, analizzando i video fatti dal prof. Sigismondi nel giugno del 2020 e 2021.

#### 4.5. Studio della curva di luce

L'idea di studiare la curva di luce di Sirio è nata quando ci siamo accorti che nel video relativo all'entrata di Sirio del 14 marzo 2024, vi era un rapido aumento nella luminosità catturata dalla telecamera. Abbiamo quindi voluto studiare i meccanismi fisici responsabili di questo flash.

<sup>3</sup> Un ulteriore effetto che potrebbe contaminare le misure è la concavità: la Piazza potrebbe non essere in piano, il che modifica le distanze  $D_i$  che potrebbero essere state sottostimate nel caso di una piazza che diminuisce la concavità verso il centro

#### 4.5.1. Analisi del video

Per analizzare la curva di luce è stato utilizzato un algoritmo di Python che consente di calcolare l'intensità media entro una regione di pixel contenente la stella (chiamata ROI, Region of interest). Si è fatto uso della libreria OpenCV (cv2 consente di lavorare su video e immagini) per il tracking della stella tramite il metodo di stima del flusso ottico di Lucas-Kanade; Sirio variava la sua posizione nel corso del video a causa del moto della Terra e del tremore della mano che sorreggeva il telefonino per cui serviva una funzione che tracciasse frame per frame la sua posizione. Il metodo di Lucas-Kanade si basa sul presupposto che l'intensità dei pixel di un'immagine rimanga costante tra due fotogrammi successivi, per cui serve un buon contrasto per ottenere buoni gradienti. Inoltre è necessario che il movimento non abbia sbalzi improvvisi. Fortunatamente il video girato rispettava questi requisiti, per cui questo metodo è risultato il migliore in tal senso.

Per il calcolo dell'intensità è stato dapprima convertito il video in immagini (fotogrammi) in scala di grigi, in cui ogni pixel ha una certa tonalità (intensità), è stata poi calcolata la media dell'intensità entro la ROI. La scelta della dimensione della ROI è una parte delicata poiché una finestra troppo piccola potrebbe non catturare abbastanza informazioni, mentre una finestra troppo grande potrebbe mediare troppo il movimento e smorzare le fluttuazioni di luminosità. Dopo qualche tentativo ho individuato che scegliere un ROI di 5x5 pixel era la scelta migliore. Ho dovuto inoltre calcolare l'intensità del fondo (cielo): la procedura è simile a quella utilizzata per la stella, ma invece di tracciare la stella, ho tracciato una regione di cielo in cui non vi è la stella. Di seguito si riporta la curva di luce della stella a partire da 12 secondi prima dell'occultazione (vale la conversione 1 s = 29.77 frames).

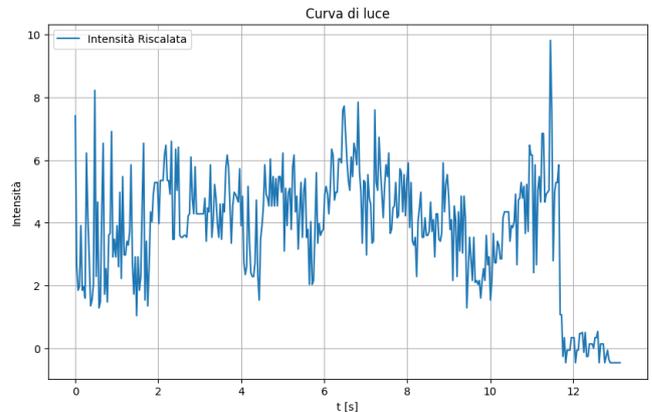


Fig. 7. Curva di luce di Sirio: scintillazione, picco e fondo

L'intensità è stata riscalata in modo da porre che la media del fondo fosse 0. Risultano i seguenti valori:

Media scintillazione	Media riscalata	$\sigma_{scint}$	Picco
8.8	4.3	1.3	9.8

Table 7. Quantità notevoli dello studio della curva di luce dell'occultazione di Sirio

Il segnale misurato corrisponde alla fluttuazione di luminosità di natura poissoniana (rumore) chiamata scintillazione. E'

dovuta alla presenza dell'atmosfera terrestre: effetti quali variazioni di temperatura e pressione, polveri, vapor acqueo, nubi sottili, turbolenza (200 Hz, dunque non visibile in questo caso) sono responsabili delle distorsioni nella propagazione della luce stellare.

Con un'analisi qualitativa dell'andamento si può dire che:

- fino a 11.5 s circa c'è fluttuazione di luminosità dovuta alla scintillazione
- nei primi 2 secondi l'intensità della luce integrata sull'apertura d'obbiettivo della telecamera mostra significative fluttuazioni: sono i fronti d'onda perturbati di Sirio che vengono catturati dalla telecamera
- ci sono dei picchi nell'andamento in corrispondenza di 11.5 secondi (ove c'è il massimo valore raggiunto), 7 secondi, e 2.5 secondi.
- ci sono delle valli a 10 secondi e 4.5 secondi
- decrescita dopo il picco massimo e caduta a 0 (fondo) dopo pochi frames (6), dovuta al fatto che Sirio è va in occultazione

La presenza di questi picchi e valli sembrerebbe suggerire che questo segnale possa seguire un preciso andamento dovuto a un qualche effetto aggiuntivo dovuto alla presenza dell'obelisco inteso come ostacolo. Potrebbe essere il tremore della mano.

Il segnale misurato può essere convertito in magnitudini, tipicamente usate per rappresentare la luminosità. La magnitudine apparente attesa di Sirio per il giorno 14 marzo 2024 da Stellarium con 1.4 massa d'aria che riducono il segnale risulta pari a -1.19. Per cui da  $m = -2.5 \log_{10}(I)$

risulta che il segnale in magnitudini è:  
 $-1.19 \pm 0.28$

Il flash risulta ben  $5\sigma$  distante dal valor medio, risultando pertanto incompatibile, ma non è il solo valore che si discosta notevolmente come potevca sembrare a una prima visione del video. Abbiamo voluto studiare la decrescita rapida che segue il picco: ci è venuto in mente che potesse essere un fenomeno di diffrazione (di Fresnel), che si verifica quando la luce incontra l'ostacolo (obelisco).

#### 4.5.2. Diffrazione di Fresnel

La diffrazione di Fresnel descrive come le onde luminose si diffrangono quando incontrano un'apertura o un ostacolo, in questo caso rappresentato dall'obelisco. Anche se il lato dell'obelisco è molto più grande della lunghezza d'onda della luce visibile, possono ancora verificarsi effetti di diffrazione ai bordi sottili o spigoli dell'obelisco.

È una forma di diffrazione più complessa rispetto alla diffrazione di Fraunhofer (che avviene a distanze infinite) e si applica quando le distanze coinvolte sono finite, come nel caso di Sirio che incontra l'obelisco a una distanza dall'osservatore dell'ordine delle decine di metri. La diffrazione causa delle variazioni di luminosità, che possono essere modellizzate utilizzando gli integrali di Fresnel:

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

L'ampiezza della luce diffratta  $I(x)$  è data da:

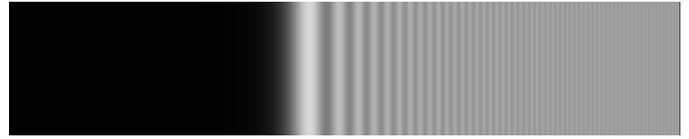
$$I(x) = I_0 \left( \left| \int_{-\infty}^x \cos\left(\frac{\pi u^2}{L\lambda}\right) du \right|^2 + \left| \int_{-\infty}^x \sin\left(\frac{\pi u^2}{L\lambda}\right) du \right|^2 \right)$$

dove  $L$  è la distanza tra me e il bordo dell'obelisco ove avviene la diffrazione,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della luce (assunta monocromatica), che assumo pari a 500 nm (differenze di 100 nm sopra e sotto questo valore cambiano di pochissimo il pattern osservato) e  $I_0$  è un fattore di normalizzazione serve appunto per normalizzare il valore a quello dell'intensità media osservata.

$L$  è calcolabile come:

$$\sqrt{D_4^2 + h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{33.5^2 + 21.2^2 + 1^2} m = 39.6m.$$

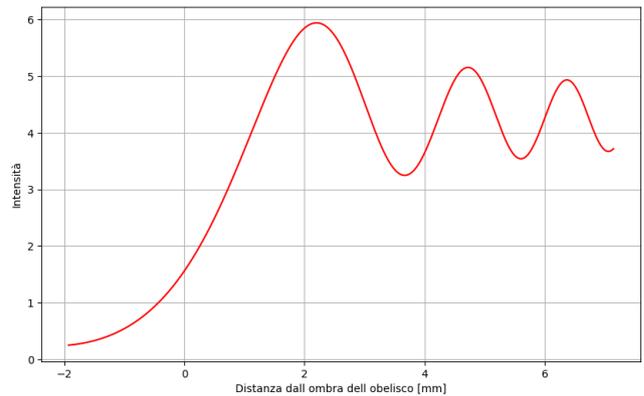
$x$  rappresenta la distanza dal bordo dell'ombra dell'obelisco. Su scale  $x \gg \sqrt{L\lambda}$  ricevo a Terra una sorgente uniformemente luminosa, all'intero dell'ombra geometrica, per  $x$  negativo, non ricevo segnale (Sirio non si vede).



**Fig. 8.** Illustrazione delle bande di Fresnel per una  $\lambda = 500nm$  e un  $L = 39.6m$

Per vedere la diffrazione di Fresnel occorre una telecamera piccola rispetto alla lunghezza caratteristica, che per puro caso è proprio quella del telefonino.

A questo punto ho calcolato la curva teorica eseguendo l'integrazione numerica con un passo 1 nm, più piccolo della scala di lunghezza caratteristica ( $\sqrt{L\lambda} = 4.4mm$ ). Ho poi tabulato i valori di  $I(x)$  ogni 2 nm, ottenendo il seguente andamento per l'intensità:



**Fig. 9.** Intensità del pattern di diffrazione di Sirio che va dietro l'obelisco osservata attraverso una telecamera di 1.85 mm di diametro

Vediamo come l'intensità raggiunga un valore pari a un quarto del primo picco nella posizione del bordo dell'ombra geometrica e che la distanza tra ciascuna frangia diminuisce man mano che ci allontaniamo dal bordo dell'ombra. Il valore a cui

tendono le oscillazioni è proprio il valore in intensità in assenza di diffrazione.

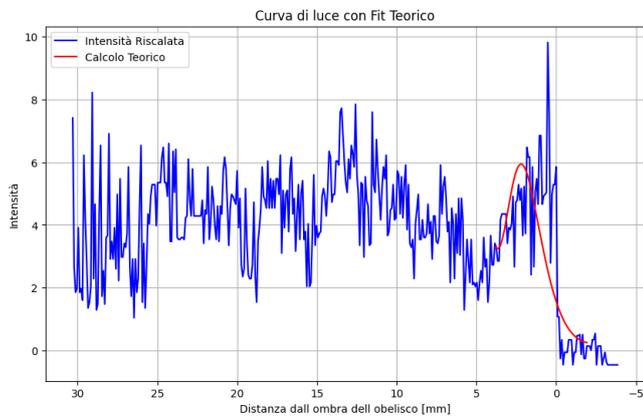
Per risolvere le frange di diffrazione, il campionamento deve essere sufficientemente rapido per catturare le variazioni della luce. Le frange di diffrazione hanno una dimensione tipica di pochi millimetri. Per garantire un campionamento adeguato e rispettare il criterio di Nyquist, dobbiamo campionare almeno due volte più velocemente di quanto varia la luce. Quindi, il tempo di campionamento dovrebbe essere almeno la metà di questo valore:  $\frac{1}{2} \frac{1\text{mm}}{2.6\text{mm/s}}$ . Poiché il video riprende a 29.77 frames/s il criterio è rispettato.

Per quanto riguarda la luminosità sappiamo che essa è proporzionale all'apertura della fotocamera:

$$L \propto A = 4\pi D^2$$

con  $D=1.85$  mm.

Si può tentare di fittare la curva rossa attesa sul segnale, opportunamente modificato in modo da graficare l'intensità in funzione della posizione (è sufficiente calcolare  $x = tv$ , ove  $v$  è la velocità lineare di 2.6 mm/s).



**Fig. 10.** Segnale con fit teorico. Si veda la sovrapposizione, che sperabilmente doveva aversi a distanze minori dall'ombra

Sfortunatamente il picco è atteso essere a una distanza di 2 mm dal bordo, mentre il segnale ha una crescita rapida per  $x$  prossimi a 1 mm.

Il picco del singolo frame verificandosi 0.2 s prima dell'occultazione, il che corrisponde a  $x = 0.5\text{mm}$ , risulta non spiegato da Fresnel. A questo punto la spiegazione per me più plausibile considerato che la rotazione dell'obelisco rispetto al centro di simmetria non risulta sufficiente a spiegare questo picco (vedi sezione successiva) potrebbe esserci la presenza di qualche irregolarità locale nella facciata dell'obelisco, che causa fenomeni ottici quali riflessione.

Il fenomeno osservato in questo video risulta visibile anche in altri 3 video, girati dal professore nel mese di marzo 2024: due all'entrata e uno all'uscita di Sirio. Quest'ultimo essendo il più fermo, è stato utilizzato in aggiunta al video del 14 marzo, per ritestare Fresnel e l'ipotesi avanzate. Ebbene, la situazione è leggermente migliorata in quanto l'aumento di intensità si verifica dopo un tempo maggiore, in particolare la distanza a cui si assiste al picco risulta 1.4 mm dunque vicina al picco previsto a 2.1 mm. Il segnale tuttavia in questo caso risulta fluttuare poco, senza rapidi flash, e il suo andamento ha una forma più simile a un periodo di onda quadra, con decrescite rapide.

Per cui il segnale sembra essere stato campionato peggio, ma il periodo oscillazione sembra essere maggiormente rispettato.

Il fatto che questi flash siano visibili sono in alcuni transiti e non in altri lascia pensare che il coefficiente di riflessione sia

maggiore nel primo caso, ovvero la superficie sia più lucida e dunque riflette meglio.

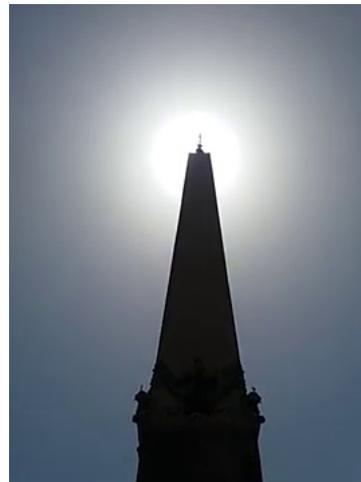
In definitiva le discrepanze osservate potrebbero essere migliorate con un'analisi più dettagliata delle irregolarità sulla superficie dell'obelisco. Inoltre, ulteriori esperimenti con diverse condizioni di luce e angoli di osservazione potrebbero fornire dati aggiuntivi per migliorare la comprensione del fenomeno.

## 4.6. Studio dell'ombra dell'obelisco

### 4.6.1. Deviazione della meridiana

Al fine di comprendere meglio la deviazione della meridiana abbiamo ritenuto opportuno integrare le misure degli anticipi di Sirio con quelle del Sole; queste misure sono state prese dal prof. Sigismondi, in corrispondenza del mese di giugno 2020 e ripetute nel 2021. Lo scopo era studiare l'ombra dell'obelisco sul disco del Cancro ricavandone dati utili per stimare l'esatta configurazione della meridiana: in particolare si sono potuti studiare la rotazione dell'obelisco, minima ma presente, e l'offset di deviazione della meridiana.

Il Sole al solstizio d'estate ha un'elevazione di  $70^\circ$  circa e vi rimane costante (con una variazione di  $1^\circ$  al massimo) per circa 10 giorni prima e dopo. Risulta quindi un periodo ideale per condurre questo studio sul disco del Cancro; l'unico ostacolo sono i molti turisti che si accalcano in quel punto cercando l'ombra. Considerando un'elevazione di  $70.3^\circ$ , risulta che l'ombra proiettata cade a metà del disco del Cancro, che ricordo essere a 11.1 m dall'obelisco. Questo disco è stato misurato con un metro da sarto e risulta di diametro 62 cm.



**Fig. 11.** Ripresa del Sole e dell'obelisco visto da D1 poco prima del transito

Il mio compito è stato estrarre dai video la strategia osservativa utilizzata e le informazioni rilevanti per l'analisi dell'ombra proiettata. Da questa si possono derivare informazioni circa il momento del transito e l'eventuale differenza in posizione tra ombra in entrata e ombra in uscita, che corrispondono rispettivamente all'ombra del lato Est e Ovest dell'obelisco.

Nei video è stato messo un segno con una matita nel punto di penombra, sia per l'entrata che per l'uscita; poi è stata misurata la distanza di queste dalla stella nera del disco del Cancro e la loro differenza per avere una stima del  $\Delta_{\text{ombra}}$ .

Il cui punto in cui inizia l'ombra, inteso come metà della zona di penombra, è stato trovato con l'ausilio dell'ombra proiet-



**Fig. 12.** Misurazione della distanza dell'ombra dalla stella nera del disco del Cancro

tata dal telefono: si è posizionato il telefono in modo che, procedendo questo ombre nette, fungesse da indicatore più preciso della zona di penombra rispetto al semplice "occhio".



**Fig. 13.** Ombra del telefonino per il punto di penombra

Il transito si è preso nell'istante in cui il fregio del Papa Sisto V (poco sotto la croce) dell'obelisco giace esattamente sulla meridiana.



**Fig. 14.** Misurazione dell'istante del transito

Si sono ottenuti i seguenti valori:

Giorno	$\Delta_{ombra}[cm]$	Transito	Effemeridi
23-06-2020	2	13:11:54	13:12:46
25-06-2020	1	13:12:05	13:12:58
26-06-2020	3	13:12:16	13:13:10
30-06-2020	–	13:13:02	13:13:58

**Table 8.** Tabella delle osservazioni con giorno,  $\Delta_{ombra}$ , transito, e effemeridi. Presenza di nuvole il 26-06-2020

Giorno	$\Delta_{ombra}[cm]$
25-06-2021	2.5
26-06-2021	1.5
28-06-2021	2.0
29-06-2021	3.0

**Table 9.** Tabella delle osservazioni con giorno,  $\Delta_{ombra}$  con l'ausilio del righello

Per l'anticipo risulta una media di  $54 \pm 1s$  di anticipo sui 4 giorni.

La velocità angolare del Sole è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \cos(\delta) = \frac{360^\circ}{23.93ore} \cos(23.4^\circ) = 13.8arcsec/s$$

Quindi l'angolo di deviazione propagando gli errori è:

$\theta_{dev} = t_{anticipo}\omega = (12.4 \pm 0.2)arcmin$ , che corrisponde a una deviazione  $40 \pm 1mm$ . E' dunque questo l'offset della meridiana.

Dalle osservazioni del professore risulta inoltre un gap dovuto alla rosa dei venti (tra D2 e D3), in cui la linea salta verso Ovest di 35 mm. Questo salto avviene a una distanza  $D_{rosa}$  dall'obelisco pari a 19.5 m, calcolo eseguito con il metodo di immagini e Sanpietrini già discusso.

#### 4.6.2. Rotazione dell'obelisco

Ora veniamo allo studio della rotazione dell'obelisco:

Ho ritenuto che il  $\Delta_{ombra}$  sia dovuto al fatto che lo spigolo Est è spostato più avanti (cioè più verso di me) rispetto a quello Ovest. Per cui trovandoci più vicini a quello Est, questo produrrà un'ombra più allungata verso Nord. Dalle msure risulta un valor medio di  $\Delta_{ombra} = 2.2 \pm 0.7cm$ , ove 0.7 cm è la std. La componente orizzontale della rotazione della sommità è  $\Delta x$ :

$$\Delta x = \ell \sin(\alpha)$$

ove  $\alpha$  è l'angolo di rotazione. Proiettando a terra sarà:

$$\Delta_{ombra} = \Delta x \frac{h}{D1}$$

Sostituendo a  $\Delta_{ombra}$  la media dei valori misurati posso trovare:  $\alpha = 0.35^\circ \pm 0.11^\circ$

ove come errore è stato considerato solo il contributo da parte dell'ombra:  $\sigma_\alpha = \frac{D1}{h\ell} \sigma_\Delta$

4

#### 4.6.3. Altre considerazioni sull'ombra

Abbiamo dunque trovato l'angolo di rotazione dell'obelisco, che potrà essere verificato con nuove misure.

Dalle misure del 26 giugno 2020 risulta inoltre che l'ombra si

<sup>4</sup> Un'ulteriore conferma della rotazione dell'obelisco è possibile ottenerla analizzando l'ombra della croce sommitale proiettata su un cartoncino. Si ottiene infatti un effetto di riflessione della luce sulla croce stessa, che avviene in anticipo all'ingresso rispetto all'uscita, suggerendo appunto una rotazione in senso antiorario

sia accorciata rispetto al giorno precedente, come testimoniato dalla misura fatta con il metro a partire dalla stella nera. Mi sarei aspettato il contrario a causa dell'abbassamento dell'elevazione del Sole con l'allontanarsi dal solstizio d'inverno. Questo per dire che ci possono essere effetti aggiuntivi oltre alla variazione giornaliera dovuta alla rivoluzione terrestre che possono contaminare le misure. Possono essere dovuti ad esempio all'umidità: il Sole è circondato da un alone che è più grosso quando è umido quindi produce un'ombra più corta (scattering di Mie). Un'altra nota è che con i secoli l'ombra si è allungata verso Nord a causa del asse terrestre che è cambiato, per cui ai tempi della costruzione della meridiana l'ombra era più corta.

## 5. Conclusioni

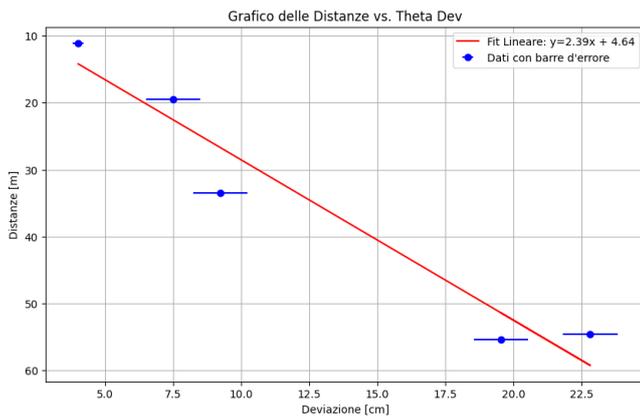
Per concludere questa relazione di laboratorio sullo studio del moto di Sirio alla meridiana di Piazza San Pietro vorrei esporre le seguenti considerazioni e risultati.

La meridiana risulta avere una deviazione verso Ovest come stimato tramite lo studio dei transiti di Sirio e dell'ombra del Sole:

Distanze [m]	$\theta_{dev}$ [arcmin]	deviazione [cm]
D1=11.1	$12.4 \pm 0.2$	$4.0 \pm 0.1$
$D_{rosa} = 19.5$	$13.2 \pm 0.1$	$7.5 \pm 0.1$
D4=33.5	$9.5 \pm 0.1$	$9.2 \pm 0.1$
D5=50	$8.2 \pm 0.1$	$11.9 \pm 0.1$
D6=54.6	$11.4 \pm 0.1$	$22.8 \pm 0.1$
D7=55.4	$12.1 \pm 0.1$	$19.5 \pm 0.1$

**Table 10.** Distanze, angoli di deviazione e deviazioni. Incertezze alla prima cifra decimale

La deviazione sembra avere un'andamento crescente con la distanza dall'obelisco  $D_i$  piuttosto costante entro gli errori, tranne che nel caso del salto della misura in D5 che, come già discusso, sembra essere stata sottostimata  $\omega$  con cui si calcola  $\theta_{dev}$ . Di seguito si riporta il grafico per completezza:



**Fig. 15.** Deviazione meridiana in funzione della distanza, scartando D5 e moltiplicando gli errori di un fattore 10 per le misure tramite i transiti, considerando l'errore sottostimato

Il  $\chi^2$  è buono essendo entro il 95% di confidenza, dunque si può affermare che la meridiana ha una deviazione lineare rispetto al Nord dal Cancro verso Ovest.

Per quanto riguarda altri importanti risultati raggiunti:

- abbiamo stimato la velocità angolare della Terra che risulta in ottimo accordo con il valore atteso di 15 arcsec/s. Con-

siderando le misure prese alle distanze D4, D6 dall'obelisco, le più precise, si è ottenuto 15.3 arcsec/s

- acquisito familiarità con gli algoritmi python e nell'analisi dello studio delle curve di luce, analizzando il segnale e i possibili contributi ad esso
- acquisito nuove conoscenze di ottica e verificata la legge di Fresnel, applicata all'occultazione di Sirio
- acquisito e applicato fondamenti di meccanica celeste e calcolo astronomico
- acquisito conoscenze sul funzionamento della meridiana
- caratterizzato l'esatta configurazione della meridiana di San Pietro, studiando la sua deviazione e la rotazione dell'obelisco

Le osservazioni condotte hanno fornito dati preziosi per lo studio dei transiti di Sirio e la verifica dell'allineamento della meridiana e della rotazione dell'obelisco. I risultati ottenuti offrono spunti per future ricerche, come l'analisi dettagliata della deviazione della meridiana e ulteriori studi sulla velocità angolare di Sirio. Questo lavoro rappresenta un contributo significativo alla comprensione dell'uso delle meridiane nelle osservazioni astronomiche e all'accuratezza delle tecniche di misurazione astronomica.

## References

- “Piazza San Pietro”, Wikipedia  
<https://www.romaora.it/gli-obelischi-di-roma-lobelisco-vaticano/>
- <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2016Gerb...9...27S/abstract>
- <http://spiff.rit.edu/richmond/occult/bessel/bessel.html>
- “Gerb-9-2016-Sigismondi-Obelisco-27-30”, Sigismondi